1.3.7 Rovnoměrný pohyb po kružnici II

Předpoklady: 010306

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny je hodně nadnesený. Pokud necháte žáky počítat samostatně, vyjde na dvě hodiny. Úvodní rozbor nedoporučuji příliš urychlovat. Při normálním postupu bude úspěchem dostat se k příkladu 7.

Pedagogická poznámka: Následující příklad používám na znamínkovou písemku. Hlásím to dopředu, snažím se žáky donutit k tomu, aby si i v této hodině pamatovali význam slov perioda a frekvence (mnozí to pletou).

Př. 1: Urči periodu, frekvenci a úhlovou rychlost kolotoče, který se během 14 sekund otočil třikrát.

Perioda: doba na jedno otočení $\Rightarrow$ $T=\frac{14}{3}\,\mathrm{s}=4,7\,\mathrm{s}$.

Frekvence: počet otáček za 1 sekundu $\Rightarrow$ $f=\frac{3}{14}\,\mathrm{Hz}=0,21\,\mathrm{Hz}$.

Úhlová rychlost: $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{3\cdot 2\pi}{14}\,\mathrm{rad/s}=1,3\,\mathrm{rad/s}$.

Kolotoč se točí s periodou 4,7 s, frekvencí 0,21 Hz a úhlovou rychlostí 1,3 rad/s.

Pedagogická poznámka: Myslím, že největším přínosem kruhového pohybu je analogie s posuvným pohybem. Žáci nemají tendence si tímto způsobem uspořádávat informace sami, je nutné jim vztahy připomínat a trvat na tom, aby je používali.

Normální rychlost otáčejících se bodů nazýváme **obvodová rychlost** (i když nejde o bod na obvodu kotouče). Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{\Delta t}=\frac{\varphi_2 r-\varphi_1 r}{\Delta t}=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)r}{\Delta t}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}r=\omega\cdot r$$

$\Rightarrow$ Můžeme si doplnit tabulku srovnání běžných a úhlových veličin:

Srovnáme si veličiny pro rovnoměrný posuvný pohyb a rovnoměrný pohyb po kružnici:

posuvný pohyb	**Pojítko**	**pohyb po kružnici**
dráha s $[\mathrm{m}]$	$s=\varphi r$	úhel $\varphi[\mathrm{rad}]$
rychlost v $[\mathrm{m/s}]$ $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v=\omega r$	úhlová rychlost $[\mathrm{rad/s}]$ $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Vidíme, že každá veličina pro posuvný pohyb má odpovídající úhlovou veličinu.

Víme, jak vypadaly rovnice pro rovnoměrný pohyb:

- $v=\mathrm{konstanta}$,
- $s=s_0+vt$.

Jak budou vypadat odpovídající rovnice pro rovnoměrný pohyb po kružnici?

- Rovnoměrný pohyb $\Rightarrow$ úhlová rychlost se nemůže měnit $\Rightarrow$ $\omega=\mathrm{konstanta}$.

- Jak bude přibývat úhel otočení?
  Stejná úhlová rychlost $\Rightarrow$ úhel rovnoměrně roste s časem: $\varphi = \omega \cdot t$ (při započítání počátečního úhlu φ_0: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$).

$\Rightarrow$ Snadno můžeme sestavit tabulku vzorců pro rovnoměrný pohyb po kružnici:

rovnoměrný posuvný pohyb	**rovnoměrný pohyb po kružnici**
$v =$ konstanta	$\omega =$ konstanta
$s = s_0 + vt$	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$

Dodatek: Předchozí výsledek snadno získáme i pomocí matematické úpravy rovnice:
$s = s_0 + vt$ (dosadíme $s = \varphi \cdot r$, $s_0 = \varphi_0 r$, $v = \omega \cdot r$)
$\varphi \cdot r = \varphi_0 \cdot r + \omega \cdot r \cdot t \quad / : r$
$\varphi = \varphi_0 + \omega t$

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu je dobré dát pozor a příliš se nezdržovat. I když je příklad jednoduchý, použitá písmenka jsou pro žáky přece jenom nová a mají z nich trochu strach. Většinou příklad skoro ihned řeším u tabule. Práce na dalších příkladech už je samostatnější.

Př. 2: Plotna harddisku u počítačového serveru se otáčí rychlostí 7200 otáček za minutu. Urči, jakou úhlovou rychlostí se otáčí. Jakou rychlostí se pohybuje bod na jejím kraji? Server běží celý rok bez jediného vypnutí. Urči, jaký úhel a jakou vzdálenost urazí za tuto dobu bod na jejím okraji. Průměr plotny je 9,5 cm.

$\Delta\varphi = 7200\,\text{ot} = 14400\pi\,\text{rad}$, $\Delta t = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$, $d = 9{,}5\,\text{cm} \Rightarrow r = 0{,}0475\,\text{m}$, $\omega = ?$, $v = ?$
$t = 1\,\text{rok} = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} = 31536000\,\text{s}$ $\quad \varphi = ? \qquad s = ?$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{14400\pi}{60}\,\text{rad/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s}$$

$v = \omega r = 754 \cdot 0{,}0475\,\text{m/s} = 35{,}8\,\text{m/s} = 129\,\text{km/h}$

$\varphi = \omega t = 754 \cdot 31536000\,\text{rad} = 2{,}38 \cdot 10^{10}\,\text{rad}$

$s = vt = 35{,}8 \cdot 31536000\,\text{m} = 1{,}13 \cdot 10^{9}\,\text{m}$

nebo jinak: $s = \varphi r = 2{,}38 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}0475\,\text{m} = 1{,}13 \cdot 10^{9}\,\text{m} = 1{,}13 \cdot 10^{6}\,\text{km}$.

Pedagogická poznámka: Ke správnému řešení je možné dospět řadou různých cest. Zejména dosazování do vzorce pro úhlovou rychlost se často liší od postupu v řešení:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{120 \cdot 2\pi}{1}\,\text{rad/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s} \text{ (převedení na ot/s)},$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{\frac{1}{120}}\,\text{rad/s} = 240\pi\,\text{rad/s} = 754\,\text{rad/s} \text{ (z periody)}.$$

Všechny tyto postupy se ve třídě objevují a já je akceptuji s tím, že je možné použít libovolnou dvojici $\Delta\varphi$ a Δt, pokud k sobě patří).

Dodatek: Pro porovnání - střední vzdálenost Země-Měsíc je přibližně 385000 km. Krajní bod harddisku ji za rok stihne urazit téměř třikrát.

Dodatek: Obrovská rychlost, kterou se disky otáčí, samozřejmě způsobuje technické problémy, namáhá použité materiály a zvyšuje spotřebu energie, ale umožňuje rychlejší čtení dat.

Př. 3: Vysvětli, jakým způsobem měří cyklocomputer ujetou vzdálenost a rychlost kola. Proč se do něj musí zadávat průměr (obvod) kola? Jak bychom měli údaj upravit, aby vycházely větší výsledky než skutečně ujeté?

První část čidla se přimontuje na vidlici kola, druhá na drát ve výpletu kola. Čidlo tak zaznamená každé otočení kola (měří vlastně uražený úhel v celých otáčkách) $\Rightarrow$ pro výpočet vzdálenosti (rychlosti) musí počítač znát poloměr kola (vzorce $v = \omega \cdot r$, $s = \varphi r$) $\Rightarrow$ musíme zadat poloměr kola (nebo jeho obvod).
Pokud zadáme větší poloměr než skutečný, cyklopočítač vypočte větší hodnoty.

Rychlost otáčení je však určena i periodou a frekvencí $\Rightarrow$ musí existovat vzorec pro výpočet úhlové rychlosti z těchto dvou veličin.

Př. 4: Najdi vztah mezi periodou, frekvencí a úhlovou rychlostí.

Dosadíme do vzorce $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.
Perioda je doba nutná k otočení o jednu otáčku $\Rightarrow$ $\Delta\varphi = 2\pi$, $t = T$.
$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (použili jsme vzorec $\frac{1}{T} = f$).

Pro periodu, frekvenci a úhlovou rychlost platí vztah $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Předchozí vztah potvrzuje blízký vztah mezi frekvencí a úhlovou rychlostí, kterého jsme si všimli v minulé hodině:
- frekvence udává počet otáček (tedy změnu úhlu) za sekundu (za čas) $\Rightarrow$ frekvence vyjadřuje změnu úhlu za změnu času (to samé co úhlová rychlost jen v jiných jednotkách),
- úhlovou rychlost získáme vynásobením frekvence číslem 2π

úhlová rychlost i frekvence jsou dva různé názvy pro stejnou veličinu vyjadřovanou v různých jednotkách (v ot/s a v rad/s) $\Rightarrow$ úhlová rychlost se často označuje jako úhlová frekvence.

Př. 5: Dětský kolotoč se otáčí s periodou 3,5 s. Urči frekvenci jeho pohybu, jeho úhlovou rychlost a rychlost, se kterou se pohybují děti, jejichž sedačka je 2 m od středu kolotoče.

$T = 3{,}5\,\mathrm{s}$, $r = 2\,\mathrm{m}$, $f = ?$, $\omega = ?$, $v = ?$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3{,}5}\,\mathrm{Hz} = 0{,}29\,\mathrm{Hz}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3{,}5}\,\mathrm{rad/s} = 1{,}80\,\mathrm{rad/s}$

$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2}{3{,}5}\,\mathrm{m/s} = 3{,}59\,\mathrm{m/s}$

Př. 6: Urči frekvenci otáčení kola automobilu, který jede po dálnici rychlostí $130\,\mathrm{km/h}$. Průměr kola je 50 cm.

$v_1 = 130\,\mathrm{km/s} = 36\,\mathrm{m/s}$, $d = 50\,\mathrm{cm} \Rightarrow r = 25\,\mathrm{cm}$, $\omega = ?$

Pokud auto jede a kola nejsou ve smyku, musí se obvodová rychlost kol rovnat rychlosti auta (kola se při valivém pohybu „pokládají“ na povrch silnice) $\Rightarrow$ použijeme vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.

$$v = \omega \cdot r = 2\pi f \cdot r \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r}$$

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{36}{2 \cdot \pi \cdot 0,25}\,\mathrm{Hz} = 23\,\mathrm{Hz}$$

Kola automobilu se otáčejí s frekvencí 23 Hz.

Pedagogická poznámka: Další příklady řeší žáci už zcela samostatně a každý se dostane tam, kam mu jeho schopnosti a snaha dovolí.

Př. 7: Dlouhohrající gramofonová deska (LP) se přehrává rychlostí $33\frac{1}{3}\,\mathrm{ot/min}$. Jakou úhlovou rychlostí se deska otáčí? Urči rychlost, kterou se pohybuje přenoska vzhledem k desce, když přehrává písničku na samém začátku (kraji) desky ve vzdálenosti 14 cm od jejího středu. Jak dlouhá je spirála, na které je nahrána písnička o délce 2:40 minuty (změnu poloměru během písničky zanedbej). Kolikrát se deska během přehrání otočí? Jakou rychlostí se přenoska pohybuje, pokud je písnička poslední na straně a poloměr otáčení klesne na 8 cm? Kdy je záznam kvalitnější?

$\Delta\varphi = 33\frac{1}{3}\,\mathrm{ot} = \frac{100}{3}\,\mathrm{ot} = 210\,\mathrm{rad}$, $\Delta t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$, $r_1 = 14\,\mathrm{cm} = 0,14\,\mathrm{m}$, $\omega = ?$, $v_1 = ?$,

$t = 2:40\,\mathrm{min} = 160\,\mathrm{s}$, $s_1 = ?$, $r_2 = 8\,\mathrm{cm} = 0,08\,\mathrm{m}$, $s_2 = ?$, $v_2 = ?$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{210}{60}\,\mathrm{rad/s} = 3,5\,\mathrm{rad/s}$$

$v_1 = \omega r_1 = 3,5 \cdot 0,14\,\mathrm{m/s} = 0,49\,\mathrm{m/s}$ $\qquad$ $s_1 = v_1 t = 0,49 \cdot 160\,\mathrm{m} = 78\,\mathrm{m}$

$v_2 = \omega r_2 = 3,5 \cdot 0,08\,\mathrm{m/s} = 0,28\,\mathrm{m/s}$ $\qquad$ $s_2 = v_2 t = 0,28 \cdot 160\,\mathrm{m} = 45\,\mathrm{m}$

$\varphi = \omega t = 3,5 \cdot 160\,\mathrm{rad} = 560\,\mathrm{rad}$ $\qquad$ $n = \frac{560}{2\pi}\,\mathrm{ot} = 89\,\mathrm{ot}$

Kvalitnější záznam je na začátku desky. Dráha má větší poloměr, přenoska se pohybuje vzhledem k desce rychleji a proto mohou být v drážce zaznamenány větší podrobnosti.

Pedagogická poznámka: Můžete navrhnout žákům, aby zkusili vypočítat, jak široké mohou být na desce drážky.

Př. 8: Turbína alternátoru (zařízení na výrobu elektřiny) se rovnoměrně otáčí rychlostí $314\,\mathrm{rad/s}$. Jak dlouho jsme sledovali její otáčení, pokud se během měření otočila o 10000 rad? Kolikrát se během měření otočila? Jaký může být největší průměr turbíny, pokud rychlost pohybu konců lopatek nemá překročit 180 m/s? Urči frekvenci a periodu jejího pohybu. Je příklad zadán správně?

$\omega = 314\,\mathrm{rad/s}$, $\varphi = 10000\,\mathrm{rad}$, $v_{max} = 180\,\mathrm{m/s}$, $t = ?$, $n = ?$, $d = ?$, $f = ?$, $T = ?$

Rovnoměrné otáčení $\Rightarrow$ $\varphi = \omega t$ $\Rightarrow$ $t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{10000}{314}\,\mathrm{s} = 31,8\,\mathrm{s}$.

Počet otáček: $1\,\mathrm{ot}$ … $2\pi\,\mathrm{rad}$

$n\,\mathrm{ot}$ … $10000\,\mathrm{rad}$

$$\frac{n}{1} = \frac{10000}{2\pi} \Rightarrow n = 1590\,\mathrm{ot}$$

$$v = \omega r \Rightarrow r = \frac{v}{\omega} = \frac{180}{314}\,\mathrm{m} = 0,57\,\mathrm{m} \Rightarrow d = 1,14\,\mathrm{m}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2\cdot\pi}\,\mathrm{Hz} = 50\,\mathrm{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{314}\,\mathrm{s} = 0,02\,\mathrm{s}$$

Otáčení turbíny jsme sledovali celkem 31,8 s, turbína se otočila 1590 krát. Průměr turbíny by neměl překročit 1,14 m. Turbína se točí s frekvencí 50 Hz a periodou 0,02 s. Příklad může být zadán dobře, protože frekvence otáčení turbíny souhlasí s frekvencí střídavého proudu v elektrické síti 50 Hz.

Př. 9: Filmová kamera snímá 24 obrázků za sekundu. Spočti, při jakých reálně možných rychlostech automobilu se bude na filmovém plátně zdát, že se jeho kola neotáčejí. Průměr kol je 40 cm, jejich disky mají na sobě trojcípou hvězdu.

$f_0 = 24\,\mathrm{Hz}$, $r = 20\,\mathrm{cm} = 0,2\,\mathrm{m}$, $v = ?$

Kamera snímá 24 obrázků za sekundu. Kolo automobilu bude na plátně stát, když ho kamera zachytí pokaždé ve stejné pozici, což znamená, že se otočí za jednu čtyřiadvacetinu sekundy. Kolo by se tak muselo otáčet s frekvencí 24 Hz nebo s násobkem této frekvence. Protože je na kole trojcípá hvězda, vypadá stejně nejen při otočení o 360°, ale i při otočení o 120°. Stačí tedy, když se kolo otáčí třetinovou rychlostí, tedy s frekvencí 8 Hz. Rychlost auta pak spočteme jako obvodovou rychlost bodu na kraji kola.

$$f = \tfrac{1}{3} f_0$$

$$v = \omega \cdot r = 2\pi f \cdot r = 2\pi \tfrac{1}{3} f_0 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi f_0 \cdot r$$

$$v = \tfrac{2}{3}\pi f_0 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi \cdot 24 \cdot 0,2 = 10\,\mathrm{m/s}$$

Auto musí jet rychlostí 36 km/h nebo násobkem této rychlosti.

Př. 10: Rychlost bodu na kraji rotujícího kotouče je 6 m/s. Rychlost druhého bodu, který je o 20 cm k ose otáčení blíž, je jen 4 m/s. Urči úhlovou rychlost otáčení kotouče a jeho poloměr.

$v_1 = 6\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 4\,\mathrm{m/s}$, $r_1 = r_2 - 0,2\,\mathrm{m}$, $r_2 = ?$

Pokud jsou dva body na jednom kruhu, který se otáčí, je jejich úhlová rychlost stejná, obvodové rychlosti se liší kvůli rozdílné vzdálenosti od středu. Z rovnosti úhlových rychlostí vytvoříme rovnici o jedné neznámé.

$\omega = \frac{v}{r}$ tedy pro první bod: $\omega = \frac{v_1}{r_1}$, a pro druhý bod: $\omega = \frac{v_2}{r_2}$.

$$\frac{v_2}{r_2} = \frac{v_1}{r_1}$$

$$r_2 v_1 = r_1 v_2$$

$$r_2 v_1 = (r_2 - 0,2) v_2$$
$$r_2 v_1 = r_2 v_2 - 0,2 v_2$$
$$r_2 v_2 - r_2 v_1 = 0,2 v_2$$
$$r_2 = \frac{0,2 v_2}{v_2 - v_1} \qquad \omega = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_2}{\frac{0,2 v_2}{v_2 - v_1}} = \frac{v_2 (v_2 - v_1)}{0,2 v_2} = \frac{v_2 - v_1}{0,2}$$
$$r = \frac{0,2 v}{v - v_1} = \frac{0,2 \cdot 6}{6 - 4} = 0,6\,\mathrm{m} \qquad \omega = \frac{v - v_1}{0,2} = \frac{6 - 4}{0,2} = 10\,\mathrm{rad/s}$$

Zkoumaný kruh má poloměr 0,6 m a otáčí se úhlovou rychlostí 10 rad/s.

Shrnutí: Rovnoměrný pohyb po kružnici je blízkou analogií rovnoměrného pohybu.